

§3. CẤP SỐ CỘNG

TÓM TẮT LÝ THUYẾT

I. ĐỊNH NGHĨA

Cấp số cộng là một dãy số hữu hạn hoặc vô hạn, trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng số hạng đứng ngay trước nó cộng với một số không đổi d .

Số không đổi d được gọi là công sai của cấp số cộng.

Nếu (u_n) là cấp số cộng với công sai d , ta có công thức truy hồi:

$$u_{n+1} = u_n + d, n \in \mathbb{N}^*$$

Đặc biệt nếu $d = 0$ thì ta có dãy số không đổi.

II. SỐ HẠNG TỔNG QUÁT

 **Định lý:**

Nếu cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu u_1 và công sai d thì số hạng tổng quát u_n được xác định bởi công thức:

$$u_n = u_1 + (n-1)d, n \geq 2$$

III. TÍNH CHẤT CÁC SỐ HẠNG CỦA CẤP SỐ CỘNG

 **Định lý:**

Trong một cấp số cộng, mỗi số hạng (trừ số hạng đầu và cuối) đều là trung bình cộng của hai số hạng đứng kề với nó.

$$u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}, k \geq 2$$

IV. TỔNG n SỐ HẠNG ĐẦU CỦA CẤP SỐ CỘNG

 **Định lý:**

Cho cấp số cộng (u_n) . Gọi S_n là tổng của n số hạng đầu của (u_n) , tức $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$. Khi đó:

$$S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2}$$

Vì $u_n = u_1 + (n-1)d$ nên ta có công thức trên có thể viết thành:

$$S_n = nu_1 + \frac{n(n-1)d}{2}$$

BÀI TẬP

Bài 1. Trong các dãy số (u_n) sau dãy nào là cấp số cộng? Tính số hạng đầu và công sai của nó.

a. $u_n = 5 - 2n$ b. $u_n = \frac{n}{2} - 1$ c. $u_n = \frac{7-3n}{2}$ d. $u_n = \frac{n^2}{2}$

Bài 2. Cho cấp số cộng có $u_1 = 3, d = -4$. Tìm $u_5, u_{20}, S_{10}, S_{15}$

Bài 3. Cho $u_3 = 6, u_4 = 9$

a. Tìm số hạng thứ 98. b. Tính tổng 100 số hạng đầu tiên của cấp số cộng.

Bài 4. Tìm u_1 và d của cấp số cộng biết :

a. $\begin{cases} u_5 = 19 \\ u_9 = 35 \end{cases}$ b. $\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_1 + u_6 = 17 \end{cases}$ c. $\begin{cases} u_7 - u_3 = 8 \\ u_2 - u_7 = 75 \end{cases}$ d. $\begin{cases} u_1 + 2u_5 = 0 \\ s_4 = 14 \end{cases}$
e. $\begin{cases} s_4 = 15 \\ s_7 = 12 \end{cases}$ f. $\begin{cases} s_5 = 35 \\ u_1 \cdot u_4 = 130 \end{cases}$ g. $\begin{cases} u_7 - u_3 = 8 \\ u_2 - u_7 = 75 \end{cases}$ h. $\begin{cases} u_7 + u_5 = 60 \\ u_4^2 + u_{12}^2 = 1170 \end{cases}$

Bài 5. Cho cấp số cộng (a_n) . Tìm $a_{11}; S_{10}$ biết:

a. $\begin{cases} a_5 = 19 \\ a_9 = 35 \end{cases}$ b. $\begin{cases} a_2 + a_5 - a_3 = 10 \\ a_1 + a_6 = 17 \end{cases}$ c. $\begin{cases} a_7 - a_3 = 8 \\ a_2 \cdot a_7 = 75 \end{cases}$ d. $\begin{cases} a_7 + a_{15} = 60 \\ a_4^2 + a_{12}^2 = 1170 \end{cases}$
e. $\begin{cases} S_4 = 9 \\ S_6 = \frac{45}{2} \end{cases}$ f. $\begin{cases} a_3 + a_5 = 14 \\ S_{12} = 129 \end{cases}$ g. $S_n = 5n^2 + 3$ h. $\begin{cases} S_5 - S_2 - a_5 = \frac{1}{10} \\ S_4 + a_7 = \frac{1}{10} \end{cases}$

Bài 6.

- Định x để ba số $x + 1, 3x - 2, x^2 - 1$ theo thứ tự cộng thành một cấp số cộng.
- Cho một cấp số cộng biết công sai $d = 4; a_n = 43; S_n = 252$. Tính n ?
- Giữa hai số 7 và 35, hãy đặt thêm sáu số để được một cấp số cộng.
- Tìm ba số a, b, c lập thành một cấp số cộng biết rằng $a + b + c = 21$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 155$.
- Số đo các góc của một tam giác lập thành một cấp số cộng, góc lớn nhất có số đo bằng $5/3$ số đo của góc nhỏ nhất. Tính các góc của tam giác đó.

Bài 7. Cho a, b, c lập thành một cấp số cộng. CMR :

- $a^2 + 8bc = (2b + c)^2$
- $a^2 + 2bc = c^2 + 2ab$
- Ba số: $a^2 + ab + b^2; a^2 + ac + c^2; c^2 + bc + b^2$ lập thành một cấp số cộng

Bài 8. CMR : Ba số $a^2; b^2; c^2$ lập thành một cấp số cộng khi và chỉ khi ba số $\frac{1}{b+c}; \frac{1}{c+a}; \frac{1}{a+b}$ lập thành một cấp số cộng